15/10/19

Πιθανότητες

• Τυχαίο Πείραμα (τ.π) : Κάθε διαδικασία που χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων. Όμως, δεν γνωρίζουμε ποιο από αυτά θα συμβεί/θα πραγματοποιηθεί.

• Δειγματικός Χώρος (δ.χ) : Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τ.π

Παραδείγματα:

1. Ρίψη Νομίσματος μία φορά → τυχαίο πείραμα

$S = \{K, \Gamma\}$

② Ριψη ζαριού μια φορά → τυχαίο πείραμα

Λύση:

$S = \{ ⚀, ⚁, \dots, ⚅ \} = \{1, 2, \dots, 6\}$

③ Ριψη νομίσματος 3 φορές ή Ριψη 3 νομισμάτων 1 φορά

Λύση:

Ενα αποτέλεσμα είναι μια τριάδα: $\underset{2}{\overset{\uparrow}{\_}}\ \underset{2}{\overset{\uparrow}{\_}}\ \underset{2}{\overset{\uparrow}{\_}}$

Άρα, θα έχω 8 τριάδες $S = \{ККК, ККГ, КГК, ГКК, ГГК, ГКГ, КГГ, ГГГ\}$

④ Ενα νόμισμα ρίχνεται συνεχώς μέχρι να έρθει για πρώτη φορά Κ.

Λύση:

Πιθανά αποτελ: $S = \{К, ГК, ГГК, ГГГК, \dots, ГГ\dots ГК, \dots\}$

Ομως, μας ενδιαφέρει ο αριθμός ρίψεων. Άρα,

$S = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (\equiv \mathbb{N} - \{0\})$

⑤ Αριθμός πελατών σε σύστημα εξυπηρέτησης (πχ Τράπεζα, Super Market)

Λύση:

Μας ενδιαφέρει το πλήθος πελατών που εισέρχονται για να εξυπηρετηθούν. Άρα,

$S = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (\equiv \mathbb{N})$

⑥ Παρατήρηση χρόνου ζωής συσκευής ή ανθρώπου

Λύση:

$S = [0, \infty)$

Παρατήρηση: Ο δ.χ μπορεί να είναι περιορισμένος, αριθμήσιμος ή υπεραριθμήσιμος.

- Ενδεχόμενο είναι κάθε υποσύνολο του δ.χ.
- Απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο είναι κάθε ενδεχόμενο που αποτελείται από ένα στοιχείο.
- Ένα ενδεχόμενο A ($A \subseteq S$) λέμε ότι έχει συμβεί ή ότι έχει πραγματοποιηθεί αν το αποτέλεσμά του είναι στοιχείο του A. Το αποτέλεσμα αυτό λέγεται ευνοϊκό για το A.

Πράξεις Ενδεχομένων

Έστω $A, B \subseteq S$

i) Το A συνεπάγεται το B αν $A \subseteq B$

Πιθανοθεωρητικά η πραγματοποίηση του A έχει ως συνέπεια την πραγματοποίηση του B.

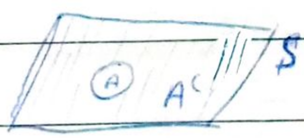
ii) Ένωση $A \cup B$.

Η πραγματοποίηση της ένωσης συνίσταται στην πραγματοποίηση τουλάχιστον ενός από τα A, B

iii) Τομή $A \cap B$

Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B

iv) Το συμπλήρωμα A, A^c ή $\bar{A}$



Το A^c πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A.

v) Διαφορά του A από το B, $A-B$.

Η πραγματοποίηση του $A-B$ συνίσταται στην πραγματοποίηση του A και τη μη πραγματοποίηση του B

- Το μέγιστο στοιχείο της δομής είναι το S. Λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο και πραγματοποιείται πάντα.
- Το ελάχιστο στοιχείο της δομής είναι το $\emptyset$. Λέγεται αδύνατο ενδεχόμενο και δεν πραγματοποιείται ποτέ.

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Τα $A, B \subseteq S$ ονομάζονται ασυμβίβαστα αν $A \cap B = \emptyset$, δηλαδή αν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα.

Νόμοι De Morgan

Αν A_i, $i=1,2,\dots$ μια ακολουθία ενδεχομένων, τότε:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \quad , \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

Κλασικός Ορισμός - Laplace

Έστω S ο δ.χ ενός τ.π. Ο S είναι πεπερασμένος και $S \neq \emptyset$. Αν A ένα ενδεχόμενο, η πιθανότητα πραγματοποίησης του A συμβολίζεται με $P(A)$ και ορίζεται: $P(A) = \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } A}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων του τ.π}}$

ή $P(A) = \dfrac{\text{πλήθος στοιχείων } A}{\text{πλήθος στοιχείων } S}$

ή $P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|}$

Ιδιότητες Κλασικού Ορισμού

i) $0 \leq P(A) \leq 1$

ii) $P(S) = 1$

iii) Αν A, B είναι ασυμβίβαστα $(A \cap B = \emptyset)$, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

iv) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Απόδειξη iii)

$$P(A \cup B) = \frac{\|A \cup B\|}{\|S\|} = \frac{\|A\| + \|B\|}{\|S\|} = \frac{\|A\|}{\|S\|} + \frac{\|B\|}{\|S\|} = P(A) + P(B)$$

Απόδειξη iv)

$$P(A^c) = \frac{\|A^c\|}{\|S\|} = \frac{\|S - A\|}{\|S\|} = \frac{\|S\|}{\|S\|} - \frac{\|A\|}{\|S\|} = 1 - P(A)$$

Αδυναμίες Κλασικού Ορισμού

1) Ο δ.χ. S να είναι πεπερασμένος

2) Αν $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, τότε $P(\{s_i\}) = \frac{\|\{s_i\}\|}{\|S\|} = \frac{1}{n}$, $\forall i = 1, \dots, n$